Homogénéisation d'un problème elliptique

Yannis Oudghiri et Kevin Massard
Lecture dirigée encadrée par Florian Méhats

29 avril 2015

Table des matières

1 Motivation

L'homogénisation des équations aux dérivées partielles joue un rôle essentiel en physique. Les matériaux composites rendent très complexe, par exemple, l'étude de la propagation de la chaleur, notamment à cause de grandes variations de la composition du matériau au niveau microscopique. La conductivité thermique dépend ainsi de la position dans le matériau, périodiquement dans le cas qui nous intéresse ici. La résolution de l'équation de la chaleur est délicate dans ce cas. Cependant, la théorie de l'homogénéisation permet de se ramener à une équation plus simple, modélisant la conduction thermique dans un matériau équivalent, de conductivité thermique constante.

2 Notions et résultats préliminaires

2.1 Espaces de Sobolev

Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On note $\Omega =]a, b[$.

Définition 1. *On appelle espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ l'ensemble $H^1(\Omega) = \left\{f \in L^2(\Omega) \mid f' \in L^2(\Omega)\right\}$, que l'on munit du produit scalaire $\langle ., . \rangle_{H^1}$ défini par :*

$$\forall f, g \in H^1(\Omega), \langle f, g \rangle_{H^1} = \langle f, g \rangle_{L^2} + \langle f', g' \rangle_{L^2}$$

La norme associée $\|.\|_{H^1}$ est alors donnée par :

$$\forall f \in H^1(\Omega), \|f\|_{H^1}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2$$

En outre, on note $H_0^1(\Omega) = \left\{f \in H^1(\Omega) \mid f(a) = f(b) = 0\right\}$.

Théorème 1. *Soit $u \in H^1(\Omega)$. Alors u admet un représentant continu, ie. il existe $\tilde{u} \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ telle que $u = \tilde{u}$ presque partout sur Ω. De plus*

$$\forall x, y \in \bar{\Omega}, \tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour démontrer ce théorème on énonce le lemme suivant.

Lemme 1. *Soient $g \in L^1(\Omega)$ et $y_0 \in \Omega$ fixé. Pour tout $x \in \Omega$, on pose :*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors $v \in \mathcal{C}(\Omega)$ et $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \int_\Omega v\varphi' = -\int_\Omega g\varphi$, autrement dit $v' = g$ au sens des distributions.

Preuve. Montrons d'abord que v est une fonction continue. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$. On note $x_* = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{y_0}^{x_n} g(t)\,\mathrm{d}t$$

On a :
- $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_\Omega g(t)\mathbb{1}_{[y_0,x_n]}\,\mathrm{d}t$.
- $g\mathbb{1}_{[y_0,x_n]}$ converge simplement vers $g\mathbb{1}_{[y_0,x^*]}$.
- $\forall t \in \Omega, |g(t)\mathbb{1}_{[y_0,x_n]}(t)| \leq |g(t)|$ et $g \in L^1(\Omega)$.

Donc d'après le théorème de convergence dominée :

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{y_0}^{x^*} g(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que v est continue sur Ω.
Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Montrons que $\int_\Omega v\varphi' = -\int_\Omega g\varphi$.

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega v(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^{y_0}\int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^b\int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^{y_0}\int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^b\int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^{y_0} g(t)\int_a^t \varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^b g(t)\int_{y_0}^t \varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \quad \text{d'après le théorème de Fubini} \\
&= -\int_a^{y_0} g(t)[\varphi'(x)]_a^t\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^b g(t)[\varphi'(x)]_t^b\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_a^{y_0} g(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_{y_0}^b g(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{car } \varphi \text{ est à support compact} \\
&= -\int_\Omega g(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Preuve. Montrons le théorème 1. Soient $u \in H^1(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$. On considère la fonction U définie sur Ω par :

$$\forall x \in \Omega, U(x) = \int_{x_0}^x u'(t)\,\mathrm{d}t$$

Elle est est continue d'après le lemme précédent. De plus on a $U' = u'$, ie. $(u-U)' = 0$. Alors $U-u$ est constante sur Ω : $U - u = \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, posant $\tilde{u} = U - \lambda$, $\tilde{u}$ est continue sur Ω et $\tilde{u} = u$. De plus, pour tout $(x, y) \in \bar{\Omega}$,

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = U(x) - U(y) = \int_{x_0}^x u'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^y u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^x u'(t)\,\mathrm{d}t + \int_y^{x_0} u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_y^x u'(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 2. *(Inégalité de Poincaré) Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^2} \le (b-a)\|u'\|_{L^2}$$

Preuve. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Alors, pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$
\begin{aligned}
|u(x)| &= |u(x) - u(a)| \\
&= \Big|\int_a^x u'(x)\,\mathrm{d}x\Big| \quad \text{d'après le théorème 1} \\
&\le \int_a^b |u'(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\le \sqrt{b-a}\|u'\|_{L^2} \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz}
\end{aligned}
$$

On a donc, en intégrant :

$$\|u\|_{L^2} \le \sqrt{b-a}\|u'\|_{L^2}\Big(\int_a^b 1\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}} = (b-a)\|u'\|_{L^2}$$

2.2 Convergence faible dans L^2 et théorème de Lax-Milgram

Proposition 1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. Si $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, alors $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.*

Preuve. On suppose que $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ par $M \le 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_{L^2} \le M$. Soient $g \in L^2(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, il existe $\tilde{g} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que

$$\|g - \tilde{g}\|_{L^2} \le \frac{\varepsilon}{\|f\|_{L^2} + M}$$

Comme $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\Big|\int_\Omega (f_n(x) - f(x))\tilde{g}(x)\,\mathrm{d}x\Big| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout $n \geq N$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\Big| \int_\Omega (f_n(x) - f(x))g(x)\,\mathrm{d}x \Big| &\leq \Big| \int_\Omega (f_n(x) - f(x))\tilde{g}(x)\,\mathrm{d}x \Big| + \Big| \int_\Omega (f_n(x) - f(x))(g(x) - \tilde{g}(x))\,\mathrm{d}x \Big| \\
&\leq \Big| \int_\Omega (f_n(x) - f(x))\tilde{g}(x)\,\mathrm{d}x \Big| + \|f_n - f\|_{L^2}\|g - \tilde{g}\|_{L^2} \quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + (M + \|f\|_{L^2})\frac{\varepsilon}{M + \|f\|_{L^2}} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Théorème 3. *(Lax-Milgram) Soient $(H, \langle .,. \rangle, \|.\|)$ un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue et coercive sur H et L une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique $x \in H$ tel que pour tout $y \in H$, $a(x, y) = L(y)$.*

3 Homogénéisation dans le cas unidimentionnel

3.1 Cadre du problème Théorème de convergence des solutions

On s'intéresse à la famille d'équations :

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(K_\varepsilon(x)\frac{\mathrm{d}u_\varepsilon}{\mathrm{d}x}\Big) + \lambda u_\varepsilon = f, \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

$$u_\varepsilon(0) = 0, \quad u_\varepsilon(1) = 0 \tag{2}$$

où :
- $\varepsilon > 0$, $\lambda \geq 0$, f est une fonction continue sur $[0, 1]$,
- $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, K_\varepsilon(x) = K(\frac{x}{\varepsilon})$, où la fonction K est continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, K(x) \geq \kappa$, où $\kappa > 0$ est une constante.

Le théorème suivant donne la convergence de la solution quand $\varepsilon \to 0$.

Théorème 4. *Quand $\varepsilon \to 0$, la solution u_ε de (1) avec les conditions aux limites (2) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la solution u du problème homogénéisé suivant :*

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(K_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\big) + \lambda u = f, \quad \textit{pour} \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

où K_0 est une constante définie par :

$$\frac{1}{K_0} = \frac{1}{T}\int_0^1 \frac{1}{K(y)}\,\mathrm{d}y$$

Justifions d'abord que le problème est bien posé. On montrera ensuite le théorème.

3.2 Existence et unicité des solutions

Proposition 2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation (1) avec les conditions (2) admet une unique solution dans $H^1(0, 1)$. De plus, l'équation homogénéisée avec les mêmes conditions aux limites admet également une unique solution.*

Preuve. Soit k une fonction continue sur $[0, 1]$, minorée par κ (on prend $k = K_0$ et $\kappa = K_0$ dans le cas particulier de l'équation homogénéisée). $H_0^1(0, 1)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(0, 1)$, donc complet. $H_0^1(0, 1)$ muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ est donc un espace de Hilbert. On considère l'application a définie sur $H_0^1(0, 1)^2$ par :

$$\forall u, v \in H_0^1(0, 1), a(u, v) = \int_0^1 k(x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_0^1 u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Clairement, a est une forme bilinéaire. Montrons qu'elle est continue sur $H_0^1(0, 1)^2$. On pose :

$$M = \max\{\lambda, \|k\|_\infty\} > 0$$

Soient $u, v \in H_0^1(0,1)$. Alors :

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \Big| \int_0^1 k(x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \Big| + \lambda \Big| \int_0^1 u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \Big| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&\leq \int_0^1 |k(x)u'(x)v'(x)|\mathrm{d}x + \lambda \Big| \int_0^1 u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \Big| \\
&\leq \|k\|_\infty \int_0^1 |u'(x)v'(x)|\mathrm{d}x + \lambda \Big| \int_0^1 u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \Big| \\
&\leq \lambda \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|k\|_\infty \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans } L^2(0,1) \\
&\leq M(\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2}) \\
&\leq M\sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2}\sqrt{\|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2} \\
&= M\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}
\end{aligned}$$

D'où la continuité de a. Montrons maintenant qu'elle est coercive. Soit $u \in H_0^1(0,1)$. Alors :

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_0^1 k(x)u'(x)^2\,\mathrm{d}x + \lambda \int_0^1 u(x)^2\,\mathrm{d}x \quad \text{car u(0)=u(1)=0} \\
&\geq \kappa \int_0^1 u'(x)^2\,\mathrm{d}x + \lambda \int_0^1 u(x)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \kappa \|u'\|_{L^2}^2 + \lambda \|u\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

- Si $\lambda = 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}
a(u,u) \geq \kappa\|u'\|_{L^2}^2 &= \frac{\kappa}{2}\|u'\|_{L^2}^2 + \frac{\kappa}{2}\|u'\|_{L^2}^2 \\
&\geq \frac{\kappa}{2}\|u\|_{L^2}^2 + \frac{\kappa}{2}\|u'\|_{L^2}^2 \quad \text{d'après l'inégalité de Poincaré} \\
&= \frac{\kappa}{2}\|u\|_{H^1}^2
\end{aligned}$$

- Si $\lambda > 0$, alors, posant $m = min\{\lambda, \kappa\} > 0$, on a :

$$a(u,u) \geq m\|u\|_{H^1}^2$$

D'où a est coercive. En outre, l'application L définie sur $H_0^1(0,1)$ par :

$$\forall u \in H_0^1(0,1), L(u) = \int_0^1 u(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

est une forme linéaire, continue car

$$\forall u \in H_0^1(0,1), |L(u)| \leq \|f\|_\infty \|u\|_{H^1}$$

Alors, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique fonction $u \in H_0^1(0,1)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(0,1), a(u,v) = L(v)$$

Par une intégration par parties, on trouve que u est solution du problème, et alors elle est unique.

3.3 Preuve du théorème

Lemme 2. *Soit a une fonction $T-$périodique, continue et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit la fonction a_ε par*

$$\forall x \in [0,1], a_\varepsilon(x) = a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)$$

Alors, quand $\varepsilon \to 0$, la fonction a_ε converge au sens de la topologie L^∞ faible $*$ vers sa moyenne, ie.

$$\forall \varphi \in L^1([0,1]), \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 a_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = a_0 \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

où

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^1 a(y)\,\mathrm{d}y$$

Preuve. • On montre d'abord la convergence pour $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,1])$.

On découpe l'intégrale ainsi :

$$\int_0^1 a_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{[\frac{1}{\varepsilon T}]-1} \int_{\varepsilon kT}^{\varepsilon(k+1)T} a_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon T[\frac{1}{\varepsilon T}]}^1 a_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour tout $k \in [\![0, [\frac{1}{\varepsilon T}]-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon kT}^{\varepsilon(k+1)T} a_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\varepsilon kT}^{\varepsilon(k+1)T} a(\frac{x}{\varepsilon})\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon\int_0^T a(y+kT)\varphi(\varepsilon kT+\varepsilon y)\,\mathrm{d}y \quad \text{par le changement de variable affine } x=\varepsilon kT+\varepsilon y \\
&= \varepsilon\int_0^T a(y)\varphi(\varepsilon kT+\varepsilon y)\,\mathrm{d}y \quad \text{par } T\text{−périodicité de } \varphi \\
&= \varepsilon\varphi(\varepsilon kT)\int_0^T a(y)\,\mathrm{d}y + \varepsilon\int_0^T a(y)(\varphi(\varepsilon kT+\varepsilon y)-\varphi(\varepsilon kT))\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\varepsilon}{T}\int_0^T a(y)\,\mathrm{d}y\int_0^T \varphi(\varepsilon kT)\,\mathrm{d}y + \varepsilon\int_0^T a(y)(\varphi(\varepsilon kT+\varepsilon y)-\varphi(\varepsilon kT))\,\mathrm{d}y \\
&= \varepsilon a_0\int_0^T \varphi(\varepsilon kT)\,\mathrm{d}y + \varepsilon\int_0^T a(y)(\varphi(\varepsilon kT+\varepsilon y)-\varphi(\varepsilon kT))\,\mathrm{d}y \\
&= \varepsilon a_0\int_0^T \varphi(\varepsilon kT+\varepsilon y)\,\mathrm{d}y + \varepsilon\int_0^T (a(y)-a_0)(\varphi(\varepsilon kT+\varepsilon y)-\varphi(\varepsilon kT))\,\mathrm{d}y \\
&= a_0\int_{\varepsilon kT}^{\varepsilon(k+1)T} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + A_k(\varepsilon) \quad \text{par le changement de variable affine } x=\varepsilon kT+\varepsilon y
\end{aligned}$$

où $A_k(\varepsilon) = \varepsilon\int_0^T (a(y)-a_0)(\varphi(\varepsilon kT+\varepsilon y)-\varphi(\varepsilon kT))\,\mathrm{d}y$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 a_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{[\frac{1}{\varepsilon T}]-1}\left(a_0\int_{\varepsilon kT}^{\varepsilon(k+1)T}\varphi(x)\,\mathrm{d}x + A_k(\varepsilon)\right) + \int_{\varepsilon T[\frac{1}{\varepsilon T}]}^1 a_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= a_0\int_0^{\varepsilon T[\frac{1}{\varepsilon T}]}\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{[\frac{1}{\varepsilon T}]-1} A_k(\varepsilon) + \int_{\varepsilon T[\frac{1}{\varepsilon T}]}^1 a_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= a_0\int_0^1\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{[\frac{1}{\varepsilon T}]-1} A_k(\varepsilon) + \int_{\varepsilon T[\frac{1}{\varepsilon T}]}^1 a_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - a_0\int_{\varepsilon T[\frac{1}{\varepsilon T}]}^1\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= a_0\int_0^1\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{[\frac{1}{\varepsilon T}]-1} A_k(\varepsilon) + \int_{\varepsilon T[\frac{1}{\varepsilon T}]}^1 (a_\varepsilon(x)-a_0)\varphi(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^1 a_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - a_0\int_0^1\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \left|\sum_{k=0}^{[\frac{1}{\varepsilon T}]-1} A_k(\varepsilon)\right| + \left|\int_{\varepsilon T[\frac{1}{\varepsilon T}]}^1 (a_\varepsilon(x)-a_0)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \tag{3}$$

Montrons que les deux termes de droite tendent vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

Puisque $\frac{1}{\varepsilon T} - 1 < [\frac{1}{\varepsilon T}]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\varepsilon T[\frac{1}{\varepsilon T}]}^{1} (a_\varepsilon(x) - a_0)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| &\leq \int_{\varepsilon T[\frac{1}{\varepsilon T}]}^{1} |a_\varepsilon(x) - a_0||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{1-\varepsilon T}^{1} |a_\varepsilon(x) - a_0)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{1-\varepsilon T}^{1} (|a_\varepsilon(x)| + |a_0|)|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{1-\varepsilon T}^{1} (\|a\|_{L^\infty} + |a_0|)\|\varphi\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon T(\|a\|_{L^\infty} + |a_0|)\|\varphi\|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

D'où

$$\left| \int_{\varepsilon T[\frac{1}{\varepsilon T}]}^{1} (a_\varepsilon(x) - a_0)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Montrons maintenant la convergence de la somme. Soit $\delta > 0$. Comme φ est continue sur le compact $[0,1]$, d'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue sur $[0,1]$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [0,1], |x - y| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{\delta}{|a_0| + \|a\|_{L^\infty}}$$

Alors, pour $\varepsilon \in \left]0, \frac{\eta}{T}\right[$ et pour tout $k \in [\![0, [\frac{1}{\varepsilon T}] - 1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
|A_k(\varepsilon)| &= |\varepsilon \int_0^T (a(y) - a_0)(\varphi(\varepsilon kT + \varepsilon y) - \varphi(\varepsilon kT))\,\mathrm{d}y| \\
&\leq \varepsilon \int_0^T |a(y) - a_0||\varphi(\varepsilon kT + \varepsilon y) - \varphi(\varepsilon kT)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq \varepsilon \int_0^T (|a_0| + \|a\|_{L^\infty})|\varphi(\varepsilon kT + \varepsilon y) - \varphi(\varepsilon kT)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq \varepsilon \int_0^T (|a_0| + \|a\|_{L^\infty})\frac{\delta}{|a_0| + \|a\|_{L^\infty}}\,\mathrm{d}y \quad \text{par continuité uniforme de } \varphi \text{ sur } [0,1] \\
&= \delta\varepsilon T
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $\varepsilon \in \left]0, \frac{\eta}{T}\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^{[\frac{1}{\varepsilon T}]-1} A_k(\varepsilon) \right| &\leq \sum_{k=0}^{[\frac{1}{\varepsilon T}]-1} |A_k(\varepsilon)| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{1}{\varepsilon T}]-1} \delta\varepsilon T = \varepsilon\delta T[\frac{1}{\varepsilon T}] \\
&\leq \delta \quad \text{car } [\frac{1}{\varepsilon T}] \leq \frac{1}{\varepsilon T}
\end{aligned}$$

D'où

$$\left| \sum_{k=0}^{[\frac{1}{\varepsilon T}]-1} A_k(\varepsilon) \right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Et donc, d'après (3) :

$$\left| \int_0^1 a_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - a_0 \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

On a ainsi montré :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^0([0,1]), \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^1 a_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = a_0 \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

- On le montre à présent pour $\varphi \in L^1([0,1])$. Soit $\varphi \in L^1([0,1])$. On prolonge φ en une fonction $\widetilde{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$ (par la valeur 0 en dehors de $[0,1]$). Alors $\widetilde{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$ car :

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{\varphi}(x)| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 |\varphi(x)| \,\mathrm{d}x = \|\varphi\|_{L^1([0,1])} < +\infty$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$, il existe $\widetilde{\psi} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que :

$$\|\widetilde{\psi} - \widetilde{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \varepsilon$$

On note ψ la restriction de $\widetilde{\psi}$ à $[0,1]$. Alors $\psi \in \mathcal{C}^0([0,1])$. On a donc :

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_0^1 a_\varepsilon(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x - a_0 \int_0^1 \varphi(x) \,\mathrm{d}x \Big| \\
&\quad= \Big| \int_0^1 a_\varepsilon(x)\psi(x) \,\mathrm{d}x - a_0 \int_0^1 \psi(x) \,\mathrm{d}x + \int_0^1 a_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \psi(x)) \,\mathrm{d}x + a_0 \int_0^1 (\psi_(x) - \varphi(x)) \Big| \\
&\quad\leq \Big| \int_0^1 a_\varepsilon(x)\psi(x) \,\mathrm{d}x - a_0 \int_0^1 \psi(x) \,\mathrm{d}x \Big| + \Big| \int_0^1 a_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \psi(x)) \,\mathrm{d}x \Big| + |a_0| \Big| \int_0^1 (\psi(x) - \varphi(x)) \Big| \\
&\quad\leq \Big| \int_0^1 a_\varepsilon(x)\psi(x) \,\mathrm{d}x - a_0 \int_0^1 \psi(x) \,\mathrm{d}x \Big| + \int_0^1 |a_\varepsilon(x)||\varphi(x) - \psi(x)| \,\mathrm{d}x + |a_0| \int_0^1 |\psi(x) - \varphi(x)| \\
&\quad\leq \Big| \int_0^1 a_\varepsilon(x)\psi(x) \,\mathrm{d}x - a_0 \int_0^1 \psi(x) \,\mathrm{d}x \Big| + \|a\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{\varphi}(x) - \widetilde{\psi}(x)| \,\mathrm{d}x + |a_0| \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{\psi}(x) - \widetilde{\varphi}(x)| \\
&\quad\leq \Big| \int_0^1 a_\varepsilon(x)\psi(x) \,\mathrm{d}x - a_0 \int_0^1 \psi(x) \,\mathrm{d}x \Big| + (\|a\|_{L^\infty} + |a_0|) \|\widetilde{\psi} - \widetilde{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\quad\leq \Big| \int_0^1 a_\varepsilon(x)\psi(x) \,\mathrm{d}x - a_0 \int_0^1 \psi(x) \,\mathrm{d}x \Big| + \varepsilon(\|a\|_{L^\infty} + |a_0|)
\end{aligned}$$

Or, $\varepsilon(\|a\|_{L^\infty} + |a_0|) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{}$ et, d'après le premier point, sachant que $\psi \in \mathcal{C}^0([0,1])$:

$$\Big| \int_0^1 a_\varepsilon(x)\psi(x) \,\mathrm{d}x - a_0 \int_0^1 \psi(x) \,\mathrm{d}x \Big| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

D'où

$$\int_0^1 a_\varepsilon(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_0^1 \varphi(x) \,\mathrm{d}x$$

On a besoin d'un lemme supplémentaire.

Lemme 3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $H^1(0,1)$ bornée pour la norme $\|.\|_{H^1}$. Alors il existe une fonction $u \in H^1(0,1)$ et une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u'_{\varphi(n)} \rightharpoonup u'$ dans L^2 et $u_{\varphi(n)} \to u$ uniformément sur* $[0,1]$.

Preuve. Comme toute fonction de $H^1(0,1)$ admet un représentant continu d'après le théorème 1, on peut supposer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\|_{H^1} \leq M$. Sachant que $[0,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est complet, on va montrer par le théorème d'Ascoli que $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Montrons que A est équicontinu. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, on a :

$$\begin{aligned}
|u_n(x) - u_n(y)|^2 &= \Big| \int_y^x u_n'(t) \,\mathrm{d}t \Big|^2 \\
&\leq \Big(\int_y^x |u_n'(t)| \,\mathrm{d}t \Big)^2 \quad \text{d'après le théorème 1} \\
&\leq \Big(\int_0^1 |u_n'(t) \mathbb{1}_{[y,x]}| \,\mathrm{d}t \Big)^2 \\
&\leq \int_0^1 |u_n'(t)|^2 \,\mathrm{d}t \int_0^1 \mathbb{1}_{[y,x]}^2 \,\mathrm{d}t \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leq |x-y| \int_0^1 |u_n'(t)|^2 \,\mathrm{d}t \\
&\leq |x-y| \|u_n\|_{H^1}^2 \quad \text{par définition de } \|.\|_{H^1} \\
&\leq |x-y| M^2 \quad \text{par hypothèse}
\end{aligned}$$

D'où $\forall x, y \in [0,1], |u_n(x) - u_n(y)| \leq M\sqrt{|x-y|}$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = (\frac{\varepsilon}{M})^2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(x, y) \in [0,1]^2$ tel que $|x - y| \leq \delta$, on a :

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq M\sqrt{|x-y|} \leq M\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2} \leq \varepsilon$$

On en déduit que A est équicontinu.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $A_x = \{u_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
|u_n(x)| &= \Big| \int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}y \Big| = \Big| \int_0^1 \Big(u_n(y) + \int_y^x u_n'(x)\,\mathrm{d}t \Big)\,\mathrm{d}y \Big| \\
&\leq \int_0^1 |u_n(y)|\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_y^x |u_n'(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \quad \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \int_0^1 |u_n(y)|\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_0^1 |u_n'(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \int_0^1 |u_n(y)|\,\mathrm{d}y + \int_0^1 |u_n'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \|u_n\|_{L^2} + \|u_n'\|_{L^2} = \|u_n\|_{H^1} \quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans } L^2(0,1) \\
&\leq M \quad \text{par hypothèse}
\end{aligned}$$

Donc A_x est relativement compact.
D'après le théorème d'Ascoli, A est donc relativement compact dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Il existe alors sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant pour la norme $\|.\|_\infty$ vers une fonction $u \in \mathcal{C}^0([0,1])$. De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, on a :

$$\begin{aligned}
\Big| \int_0^1 u_{\varphi(n)}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \Big| &\leq \int_0^1 |u_{\varphi(n)}(x) - u(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \|u_{\varphi(n)} - u\|_\infty \int_0^1 |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

La sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers u dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$. Donc $u'_{\varphi(n)} \to u'$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$ par continuité de la dérivation des distributions. Or, comme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(0,1)$, $(u'_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0,1)$. D'où $u'_{\varphi(n)} \rightharpoonup u'$ dans $L^2(0,1)$ faible.
Preuve. Enfin, démontrons le théorème 4. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\forall x \in]0,1[, -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(K_\varepsilon(x)\frac{\mathrm{d}u_\varepsilon}{\mathrm{d}x}) + \lambda u_\varepsilon(x) = f(x) \tag{4}$$

En multipliant par u_ϵ, on obtient :

$$\forall x \in]0,1[, -u_\varepsilon(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(K_\varepsilon(x)\frac{\mathrm{d}u_\varepsilon}{\mathrm{d}x}) + \lambda u_\varepsilon^2(x) = u_\varepsilon(x)f(x)$$

On intègre cette relation :

$$-\int_0^1 u_\varepsilon(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(K_\varepsilon(x)\frac{\mathrm{d}u_\varepsilon}{\mathrm{d}x}\Big) + \lambda u_\varepsilon^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u_\varepsilon(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

Puis, par intégration par parties, sachant que $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0$, on a :

$$\int_0^1 K_\varepsilon(x)(u_\varepsilon'(x))^2\,\mathrm{d}x + \lambda\int_0^1 u_\varepsilon^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u_\varepsilon(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, K_\varepsilon(x) \geq \kappa$, on obtient :

$$\kappa\int_0^1 (u_\varepsilon'(x))^2\,\mathrm{d}x + \lambda\int_0^1 u_\varepsilon^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 u_\varepsilon(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

D'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(0,1)$:

$$\kappa\int_0^1 (u_\varepsilon'(x))^2\,\mathrm{d}x + \lambda\int_0^1 u_\varepsilon^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^2}\|u_\varepsilon\|_{L^2}$$

Soit :

$$\kappa\|u_\varepsilon'\|_{L^2}^2 + \lambda\|u_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}\|u_\varepsilon\|_{L^2}$$

- Si $\lambda = 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2}\|u_\varepsilon\|_{H^1} &\geq \|f\|_{L^2}\|u_\varepsilon\|_{L^2} \\ &\geq \kappa\|u'_\varepsilon\|^2_{L^2} = \frac{\kappa}{2}\|u'_\varepsilon\|^2_{L^2} + \frac{\kappa}{2}\|u'_\varepsilon\|^2_{L^2} \\ &\geq \frac{\kappa}{2}\|u_\varepsilon\|^2_{L^2} + \frac{\kappa}{2}\|u'_\varepsilon\|^2_{L^2} \quad \text{d'après l'inégalité de Poincaré} \\ &= \frac{\kappa}{2}\|u_\varepsilon\|^2_{H^1}\end{aligned}$$

et donc

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq \frac{2}{\kappa}\|f\|_{L^2} \tag{5}$$

- Si $\lambda > 0$, alors, posant $C = min\{\lambda, \kappa\} > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2}\|u_\varepsilon\|_{H^1} &\geq \|f\|_{L^2}\|u_\varepsilon\|_{L^2} \\ &\geq \lambda\|u_\varepsilon\|^2_{L^2} + \kappa\|u'_\varepsilon\|^2_{L^2} \\ &\geq C\|u_\varepsilon\|^2_{H^1}\end{aligned}$$

et donc

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq C^{-1}\|f\|_{L^2} \tag{6}$$

Donc la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $H^1(0,1)$. D'après le lemme précédent, on peut alors en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$ qui converge uniformément vers une fonction u et telle que $u'_{\varphi(\varepsilon)}$ converge faiblement vers u' dans $L^2(]0,1[)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère la fonction ξ_ε définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \xi_\varepsilon(x) = K_\varepsilon(x)u'_\varepsilon(x)$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\|\xi_\varepsilon\|^2_{H^1} = \|\xi_\varepsilon\|^2_{L^2} + \|\xi_{\varepsilon'}\|^2_{L^2} &= \int_0^1 (\xi_\varepsilon(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (\xi'_\varepsilon(x))^2\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (K_\varepsilon(x))^2(u'_\varepsilon(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (\lambda u_\varepsilon(x) - f(x))^2\,\mathrm{d}x \\ &\leq \|K\|^2_\infty \int_0^1 (u'_\varepsilon(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (\lambda u_\varepsilon(x) - f(x))^2\,\mathrm{d}x \quad \text{car } K \text{ est périodique et continue} \\ &\leq \|K\|^2_\infty \int_0^1 (u'_\varepsilon(x))^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 ((\lambda u_\varepsilon(x))^2 + f(x)^2)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \|K\|^2_\infty\|u_\varepsilon\|^2_{H^1} + 2\lambda^2\int_0^1 (u_\varepsilon(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x \\ &\leq (\|K\|^2_\infty + 2\lambda^2)\|u_\varepsilon\|^2_{H^1} + \|f\|^2_{L^2}\end{aligned}$$

- Si $\lambda = 0$, alors on a :

$$\|\xi_\varepsilon\|^2_{H^1} \leq \|K\|^2_\infty \frac{4}{\kappa^2}\|f\|^2_{L^2} + \|f\|^2_{L^2} \quad \text{d'après (5)}$$

- Si $\lambda > 0$, alors :

$$\|\xi_\varepsilon\|^2_{H^1} \leq (\|K\|^2_\infty + 2\lambda^2)C^{-2}\|f\|^2_{L^2} + \|f\|^2_{L^2} \quad \text{d'après (6)}$$

Donc $(\xi_{\varphi(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $H^1(0,1)$. Alors, d'après le lemme 3, il existe une fonction ξ et une sous-suite $(\xi_{\varphi\circ\tilde{\varphi}(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$ qui converge uniformément vers ξ et telles que $\xi'_{\varphi\circ\tilde{\varphi}(\varepsilon)}$ converge faiblement vers ξ'dans $L^2(0,1)$. On note $\psi = \varphi \circ \tilde{\varphi}$. Par unicité de la limite, on a $\xi' = \lambda u - f$. Soit $\varphi \in L^2(0,1)$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 u'_{\psi(\varepsilon)}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\xi_{\psi(\varepsilon)}(x)}{K_{\psi(\varepsilon)}(x)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{K_{\psi(\varepsilon)}(x)}\xi(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\xi_{\psi(\varepsilon)}(x) - \xi(x)}{K_{\psi(\varepsilon)}(x)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Or, $\xi_{\psi(\varepsilon)}$ converge uniformément vers ξ et

$$\Big|\int_0^1 \frac{\xi_\varepsilon(x) - \xi(x)}{K_\varepsilon(x)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leq \int_0^1 \frac{|\xi_\varepsilon(x) - \xi(x)|}{|K_\varepsilon(x)|}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leq \kappa\|\varphi\|_\infty\|\xi_\varepsilon - \xi\|_\infty$$

On a donc

$$\int_0^1 \frac{\xi_{\psi(\varepsilon)}(x)-\xi(x)}{K_{\psi(\varepsilon)}(x)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

En outre, d'après le lemme 2, sachant que $\xi\varphi \in L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$,

$$\int_0^1 \frac{1}{K_{\psi(\varepsilon)}(x)}\xi(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^1 \frac{\xi(x)}{K_0}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^1 u'_{\psi(\varepsilon)}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^1 \frac{\xi(x)}{K_0}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

D'où $u'_{\psi(\varepsilon)}$ converge faiblement vers $\frac{\xi(x)}{K_0}$ dans $L^2(0,1)$. Par unicité de la limite, on a donc $u' = \frac{1}{K_0}\xi$. Ainsi :

$$-(K_0u')' + \lambda u = f$$

Finalement, $u_{\psi(\varepsilon)} \to u$ uniformément. Donc, par unicité de la limite u (qui est l'unique solution du problème homogénéisé), u_ε converge uniformément vers la solution u du système homogénéisé.

Références

[1] Papanicolaou Bensoussan, Lions. *Asymptotic analysis for periodic structures.* 1978.

[2] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle.* Dunod, 1983.

[3] Florian Méhats. *Homogénéisation d'un écoulement en milieu poreux.* 2010.